ALGEBRE LINÉAIRE
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES
Math 3, L2 PC

I) Algèbre linéaire

A) Espaces vectoriels

a) Définitions et exemples
b) Indépendance, bases et dimensions.
c) Sous-espaces
d) Applications linéaires

B) Matrices

a) Applications linéaires et matrices
b) Changements de bases
c) Déterminants
d) Rang
e) systèmes d'équations linéaires

C) Formes particulières

a) Zoologie des matrices.
b) Valeurs propres et vecteurs propres.
c) Polynôme caractéristique.
b) Diagonalisation et trigonalisation.

1 Espaces vectoriels

1.1 Definitions et exemples

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble V muni de deux lois :
— (1) $+$: appelée addition (ou loi interne) $+ : V \times V \longrightarrow V$
— (2) $\cdot$: appelée multiplication par un scalaire (ou loi externe) $\cdot : K \times V \longrightarrow V$
qui satisfont aux axiomes suivants :

1. (A1) La loi $+$ est associative.
   i.e. $\forall x, y, z \in V, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
2. (A2) La loi $+$ est commutative.
   i.e. $\forall x, y \in V \quad x+y = y+x$.
3. (A3) La loi $+$ admet un élément neutre (à gauche et à droite) noté 0 (parfois 0_V).
   i.e. $\forall x \in V$, $x + 0_V = 0_V + x = x$.
4. (A4) Tout élément de V a un opposé pour la loi $+$ (Autrement dit $V, +$ est un groupe commutatif).
5. (M1) La loi . est associative.
6. (M2) La multiplication par l'unité $1_{\mathbb{K}}$ du corps est l'identité de V.
7. (MA1) La loi . est distributive par rapport à l'addition $+$.
   i.e. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, and $\forall x, y \in V \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot xy$.
8. (MA2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, and $\forall x \in V$, $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

Exemples 1.1.2.

1) $V = \mathbb{R}$ considéré comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.
2) $V = \mathbb{R}$ considéré comme un $K = \mathbb{Q}$-vectoriel.
3) $V = \mathbb{C}$ considéré comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.
4) $V = \mathbb{R}^2$ considéré comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.
5) $V = \mathbb{R}^n$ considéré comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.
6) $V = \mathbb{R}[X]$ considére=é comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.
7) $V = \mathbb{R}[X]_3$ considére=é comme un $K = \mathbb{R}$-vectoriel.

1.2 Indépendance, partie génératrice, base

Définitions 1.2.1. 1. Un ensemble de vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ d'un $\mathbb{K}$-vectoriel est lié s'il existe des scalaires $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$.

2. Un sous ensemble L d'un espace vectoriel V esl libre si tout sous ensemble fini de L est libre.
3. libre, s'il n'est pas lié.
4. Un sous ensemble X d'un espace vectoriel V est appelée une partie génératrice de V si pour tout vecteur $v \in V$, il existe un ensmble fini $x_1, \dots, x_n \subseteq X$ et des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ éléments de $\mathbb{K}$ tels que
$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$
5. Une base de V est une partie libre et génératrice.

Exemples 1.2.2. On donne des exemples de parties libres, génératrices et de bases
- — Dans $\mathbb{R}^2$
- — Dans $\mathbb{R}^n$ for sone $n \in \mathbb{N}$
- — Dans $\mathbb{R}[X]$.
- — Dans l'espace des fonctions (continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.3. *1. Toute partie libre maximale est génératrice et est donc une base.*

2. Toute partie génératrice minimale est libre et est donc une base.

3. Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admet une base finie $v_1, \dots, v_n$ alors toute base de V possède n éléments.

On peut montrer que tout espace vectoriel admet une base...On ne considérera que les espaces vectoriels admettant une base finie. Le denier point du théorème ci desssus justifie aors la définition suivante.

Définition 1.2.4. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'ue base.

1.3 Sous Espaces

Définition 1.3.1. 1. Un sous espace vectoriel W d'un espace vectoriel V est un sous ensemble dde V qui est fermé pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

2. Si X est un sous-ensemble d'un vectoriel V, le sous espace de V engendré par X est le plus petit sous-espace de V qui contient X

Théorème 1.3.2. *Soit V un $\mathbb{K}$ vectoriel.*

1. L'intersection de 2 sous-espaces de V est encore un sous espace de V.

2. L'intersection d'un famille quelconque de sous espaces de V est un sous espace de V.

3. *Si U et W sont des sous-espaces de V alors*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U\ rmet\ w \in W\}$$

est un sous espace de V.

4. *Si X est un sous ensemble de V, le sous espace engendré par X est l'ensemble des combinaisons linéiares (finies) des éléments de X.*
5. *Si U et W sont des sous-espaces de V alors*

$$Dim(U + W) = Dim(U) + Dim(W) - Dim(U \cap W)$$

Définition 1.3.3. Soit U et W deux sous espaces vectoriels d'un vectoriel V. On dit que U et W sont complémentaires dans V si les deux conditions

$$U \cap W = \{0\} \qquad \text{et} \qquad U + W = V$$

sont satisfaites.

Théorème 1.3.4. *Tout sous vectoriel U d'un vectoriel V admet un complémentaire.*

1.4 Applications linéaires

Définition 1.4.1. Soient V et W deux $\mathbb{K}$-vectoriels et $f : V \to W$ une application. L'application f est linéaire si

— $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in V$.
— $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemple 1.4.2. 1. projections, homothéties.

Théorème 1.4.3. *Une application linéaire $f : V \to W$ est entièrement déterminée par les images des éléments d'une base de V.*

Définition 1.4.4. Soient V, W deux $\mathbb{K}$-vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaire.

— Ker(f)= $\{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$
— Im(f)= $\{y \in W \mid \exists x \in V, f(x) = y\}$

Proposition 1.4.5. *Soient v, W deux $\mathbb{K}$-vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaie, f est un monomorphisme (i.e. f est injective) ssi $ker(f) = \{0\}$*

Théorème 1.4.6 (théorème du rang)**.** *Soient V, W deux $\mathbb{K}$-vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaie, alors*

$$dimV = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$$

Théorème 1.4.7. *Soient V un $\mathbb{K}$ vectoriel finidimensionnel et $f : V \to V$ une application liénaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f es injective,*
2. *$Ker(f) = 0$,*
3. *f est surjective*
4. *f est bjective.*

Notation

Si V est un vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V alors pour un vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in V$ on note $[v]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)^t$ la colonne des coordonnée de v dans la base $\mathcal{B}$

2 Matrices

2.1 Applications linéaires et matrices

Soient $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-vectoriel V et $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_l\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-vectoriel W. Si $f : V \to W$ est une application linéaire, on écrit les vecteurs $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ dans la base $w_1, \ldots, w_l$ en posant $f(v_i) = \sum_{j=1}^{l} a_{ji} w_j$. On obtient ainsi un tableau appelé la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ que l'on note $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. On a donc

$$(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})_{ji} = a_{ji} \qquad \text{ou} \qquad f(v_i) = \sum_{j=1}^{l} a_{ji} w_j.$$

On considère maintenant la matrice d'une somme de 2 applications linéaires $f, h : U \to V$ et la matrice d'une composition .

Proposition 2.1.1. *Soient U, V, W trois K-espaces vectoriels finidimensionnels et $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots v_r\}, \mathcal{D} = \{w_1, \ldots, w_l\}$ des bases respectives et $h, f : U \to V$, $g : V \to W$ des applications linéaires. On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, r$*

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{r} f_{ji} v_j, \quad h(u_i) = \sum_{j=1}^{r} h_{ji} v_j \quad g(v_k) = \sum_{s=1}^{l} g_{sk} w_s.$$

Alors

$$(f+h)(u_i) = \sum_{j}^{r} (f_{ji}+h_{ji}) v_j \text{ et } (g \circ f)(u_i) = \sum_{t=1}^{l} c_{ti} w_t, \text{ avec, } c_{ti} = \sum_{p=1}^{r} f_{tp} g_{pi} \text{ pour } i = 1, \ldots, n$$

.

Démonstration. Calculer... □

Ceci conduit à définir l'addition et la multiplication des matrices.

Définition 2.1.2. Soit $A, B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$, $C \in M_{l\times r}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors, pour $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq l$ et $1 \leq s \leq r$ on définit

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (AC)_{is} = \sum_{k=1}^{l} A_{ik}C_{ks} \quad \text{et} \quad (\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}$$

Exercice Vérifier que pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies ci dessus les matrices $M_{n,l}(\mathbb{K})$ forment un espace vectoriel de dimension nl.

Dans la suite on suppose que les espaces vectoriels sont finidimensionels.

Proposition 2.1.3. *Soient V, W, U des $\mathbb{K}$ vectoriels, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des bases de V, W et U respectivement, $f : V \to W$, $g : W \to U$ des applications linéaires. On a*

1. *si $v \in V$ $[f(v)]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}}$*
2. *$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$*

2.2 Changements de bases

Proposition 2.2.1. *Soient V, W des $\mathbb{K}$-vectoriels f une application linéaire $f : V \to W$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de V et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des bases de W. Alors, si $dim_{\mathbb{K}}V = n$ et $dim_{\mathbb{K}}W = l$*

1. *$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = I_n$ et $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(Id)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(Id) = I_l$*
2. *On a $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(Id)M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$*
3. *Si $V = W$ on peut choisir $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$ ce qui donne*

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id).$$

2.3 Déterminants

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée on note pour $1 \leq i, j \leq n$, A^{ij} la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

On attache à la matrice A le nombre appelé le déterminant, noté $Det(A)$, et défini par récurrence, comme suit : si $n = 1$, $A = a \in \mathbb{K}$ et $Det(A) = a$. On suppose avoir défini le déterminant pour les matrices carrées de taille $< n$ et on pose

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} Det(A^{1i})$$

Ce nombre possède de nombreuses propriétés et de nombreuses caractérisations (qui entraînent donc plusieurs définitions possibles....toutes équivalents). Tout d'abord des définitions classiques et utiles

Définitions 2.3.1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour $1 \leq i, j \leq n$,

a) A^{ij} dénote la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A

b) Le mineur $|A|_{ij}$ de A est le détermniant de la matrice carrée obtenue en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne i.e. $|A|_{ij} = Det(A^{ij})$

c) Le cofacteur C_{ij} est le nombre $(-1)^{i+j}Det(A^{ij}) = (-1)^{i+j}|A|_{ij}$.

Quelques exemples.
Mentionnons deux autres notions importantes :
Si $A = (a_{ij}) \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ la transposée de A est la matrice notée A^t et définie par

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

D'autres part la trace d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, notée $tr(A)$ est la somme des éléments diagonaux i.e.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 2.3.2. *Soient $A \in M_{nl}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{lp}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in mathbbK$.*

1. $(AB)^t = B^tA^t$.
2. $(\alpha A + B)^t = \alpha A^t + B^t$.
3. $((A)^t)^t = A$.
4. *Si $n = l = p$, $tr(A+B) = tr(A+B)$, $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$ et $tr(AB) = tr(BA)$.*

Voici quelques propriétés du déterminant.

Théorème 2.3.3. *Soient $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées.*

1. *Pour $1 \leq j \leq n$, $det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}Det(A^{ji})$*
2. *Pour $1 \leq j \leq n$, $det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A|_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$*
3. *Pour $1 \leq j \leq n$, $det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ji}|A|_{ji} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}C_{ji}$*
4. *Si la matrice A a 2 lignes (resp. colonnes) égalent alors $Det(A) = 0$*
5. *Si $A^1, A^2, \ldots A^n \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ sont des colonnes on a*
   — $Det(A^1, \ldots, A^r+B, A^{r+1}, \ldots, A^n) = Det(A^1, \ldots, A^n)+Det(A^1, \ldots, A^{r-1}, B, A^{r+1}, \ldots A^n)$
   — *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $Det(A^1, \ldots, \alpha A^r, A^{r+1}, \ldots, A^n) = \alpha Det(A^1, \ldots, A^n)$*
   Les mêmes propriétés sont valables sur les lignes.
6. *Si on ajoute un multiple d'une ligne (resp. colonne) de A a une autre ligne (resp. colonne) de A le déterminant ne change pas.*
7. *Si B est obtenue à partir de A en permutant 2 lignes (resp. colonnes) de A, alors $Det(B) = -Det(A)$*
8. $Det(I_n) = 1$

9. $Det(AB) = Det(A)Det(B)$
10. $Det(A^t) = Det(A)$.

Autres exemples

On peut aussi utiliser le déterminant et en particulier la matrice des cofacteurs pour calculer l'inverse d'une matrice :

On appelle comatrice de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, notée $Com(A)$ la matrice carrée $n \times n$ définie par

$$Com(A)_{ij} = C_{ij}$$

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$

Théorème 2.3.4. *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors*

$$A.com(A)^t = Com(A)^t.A = Det(A)I_n$$

Corollaire 2.3.5. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et on a alors*

$$A^{-1} = \frac{Com(A)^t}{det(A)}$$

Cette formule est en fait rarement utilisée pour effectivement calculer l'inverse d'une matrice...

Corollaire 2.3.6. *Si $P, A \in M_n(\mathbb{K})$ et P inversible alors $Det(PAP^{-1}) = Det(A)$*

Ce corollaire est important il montre que l'on peut définir le déterminant d'une application linéaire $f : V \to V$ (on suppose v de dimension finie) en posant

$$Det(f) = Det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

Où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de V. Lors d'un changement de base la matrice représentant f est changée e une matrice conjuguée et donc le déterminant de f est indépendant du choix de la base.

2.4 Rang

Définition 2.4.1. On appelle rang colone (noté $Rg_c(A)$) d'une matrice $A \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ la dimension du sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A. On définit de même le rang ligne de A (noté $Rg_l(A)$.

Proposition 2.4.2. *Soit $A \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$, on a $Rg_c(A) = Rg_l(A)$ et $Rg_l(A^t) = Rg_c(A)$.*

Revenons sur les matrices inversibles :

Proposition 2.4.3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible*
2. *Les lignes de A sont indépendantes.*
3. *Les colonnes de A sont indépendantes.*
4. *$Rg_l(A) = Rg_c(A) = n$*
5. *Il existe $X \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AX = I_n$*
6. *Il existe $Y \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $YA = I_n$*

Ce théorème fournit une manière pratique pour déceler si des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement indépendants.

2.5 Systèmes d'équations linéaires

Définition 2.5.1. Soit $A \in M_{n,l}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Un système de n équations à l inconnues $x_1, \ldots, x_l$ est un ensemble d'équations linéaires (les inconnues X_i apparaissent avec un degré au plus 1 dans chacune des équations) de la forme

$$AX = B \quad \text{ou} \quad X = (x_1, \ldots, x_l)^t$$

On va utiliser essentiellement la méthode du **pivot de Gauss** pour résoudre un système d'équations linéaires...Mais il ne faut pas perdre de vue que d'autres méthodes sont parfois plus adaptées. La méthode du pivot de Gauss permet de transformer une matrice en une matrice échelonnée et ainsi de résoudre un système d'équations linéaires car les changements opérés pour échelonner la matrice (appelés opérations élémentaires) ne modifient pas les solutions du système.

Définition 2.5.2. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{nl}(\mathbb{K})$. On définit pour chaque ligne $1 \leq i \leq n$ un naturel r_i en posant $r_i = min\{s \mid a_{is \neq 0}\}$ si la ligne i n'est pas nulle et $r_i = n+1$ si la ligne i est nulle. On dit que la matrice A est échelonnée si Pour $1 \leq i \leq n-1$, $i \leq r_i < r_{i+1}$

Pour résoudre un système on utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice. Une fois la matrice échelonnée le système se résout très facilement.

Méthodes pour le calcul de l'inverse d'une matrice.
1) Méthode du pivot de Gauss.
2) Très semblable à la méthode du pivot : on écrit $(A|I_n)$ et on fait subir aux lignes de cette matrice des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice $(I_n|B)$. La matrice B qui en fait "mémorise " les opérations que l'on a fait subir aux lignes de A pour aboutir à I_n est donc telle que $BA = I_n$. C'est donc l'inverse de A.
3) On écrit $AX = B$ ou $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)^t$ qui exprime les b_i en fonction des x_i par manipulations on essaye d'exprimer les b_i en fonction des x_i. On a alors $X = CB$ et en fait $C = A^{-1}$. C'est assez souvent une méthode rapide.

4) bien sûr on a la formule donnée par le corollaire 2.3.5

Résolution d'un système par la méthode de **Cramer**

Théorème 2.5.3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice dont la i^{eme} colonne est notée A^i et $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. On suppose $Det(A) \neq 0$ et on considère le système d'équations $AX = B$. Alors pour $1 \leq l \leq n$ on a*

$$x_l = \frac{Det(A^1, \dots, A^{l-1}, B, A^{l+1}, \dots, A^n)}{Det(A)}$$

La preuve de ce théorème est immédiate et basée sur la propriété de linéarité du déterminant par rapport aux colonnes (cf. 2.3.3).

3 Formes particulières

3.1 Zoologie des matrices

Définitions 3.1.1. Une matrice $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable (resp. trigonalisable) s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que les éléments non diagonaux (en dessous de la diagonale) de PAP^{-1} sont nuls.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite
idempotente si $A^2 = A$,
nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$
Symétrique si $A^t = A$, antisymétrique si $A^t = -A$.

3.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Le but de cette section est de diagonaliser ou de trigonaliser les matrices (quand c'est possible) de façon à faciliter la recherche de solutions des systèmes d'équations (différentielles) linéaires.

Définition 3.2.1. Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur **non nul** $v \in V$ tel que $f(v) = \lambda v$. On dit alors que v est un vecteur propre de f assovié à la valeur propre λ.

Théorème 3.2.2. *Soit $f : V \to V$ une application linéaire, λ et v une valeur propre et un vecteur propre de f. Si $\mathcal{B}$ est une base de V alors*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$$

Ce théorème justifie le fait que l'on définisse les notions de valeurs propres et de vecteurs propres pour une matrice carrée...

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, on pose

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

est un sous espace vectoriel de V appelé l'espace propre associé à la valaur propre λ.

Il faut remarquer que f retreinte à V_λ est une homothétie de rapport λ donc est très simple. Le meilleure des cas est quand V lui-même est une somme directe des espaces propres associés à f. Il existe alors une base de V dans laquelle f est diagonale.

Les objectifs que l'on poursuit font que l'on va s'intéresser plus aux valeurs et vecteurs propres des matrices...mais il est utile d'avoir en tête le point de vue des applcations linéaires qui est plus géométrique et est plus indépendant choisies dans V.

Le spectre d'un matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

Le but des deux sous-sections qui suivent est d'indiquer quand et comment on peut décomposer un espace vectoriel en sous espaces propres par rapport à une application linéaire. En fait on se préoccupera plutôt de diagonaliser et trigonaliser une matrice.

3.3 Polynôme caractéristique

Proposition 3.3.1. *Soient V un $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension n et $f : V \to V$ une application continue. les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *λ est une valeur propre pour f.*
2. *$f - \lambda id_V$ n'est pas injective.*
3. *$f - \lambda id_V$ n'est pas surjective.*
4. *$Det(f - \lambda id_V) = 0$*
5. *λ est racine du polynôme $Det(M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) - XI_n)$ Où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de V.*

Définition 3.3.2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, le polynôme $Det(A - XI_n)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A. Ces racines fournissent les valeurs propres de cette matrice. On le note $\chi_A(X)$.

Un théorème important est le théorème de Cayley Hamilton....le polynôme caractéristique de A annule la matrice A

Théorème 3.3.3 (Cayely-Hamilton)**.** *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\chi_A(A) = 0$.*

Un résultat essentiel en vue de construire des bases de vecteurs propres est celui qui suit.

Proposition 3.3.4. *Soit $f : V \to V$ une application linéaire. Des vecteurs propres pour f associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Si $v_1, \dots, v_n$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i $(i = 1, \dots v_n)$ on suppose qu'ils ne forent pas un famille indépendantes et on choisit un sous ensemble indépendant de taille minimale. Sans perte de généralité on peut supposer que cette famille est $\{v_1, \dots, v_k\}$. On a donc $\sum \alpha_i v_i = 0$ et donc aussi, en appliquant f, $\sum \alpha_i \lambda_i v_i = 0$ et $\sum \alpha_i \lambda_k v_i = 0$ en soustrayant ces deux égalités on obtient une relation de dépendance ayant moins de k termes....Conclure □

On en arrive au théorème de diagonalisation

Théorème 3.3.5. *Soit $f : V \to V$ une application linéaire. On suppose $dimV = n$ Les affirmations suivantes sônt équivalentes :*

1. *f est diagonalisable*
2. *Il existe une base de V formée de vecteurs propres pour f*
3. *V est somme directe des sous espaces propres associés à f.*

On va donner l'analogue de ce théorème au point de vue matricielle.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ soit diagonale.

Corollaire 3.3.6. *Soit $P, A \in M_n(\mathbb{K})$ et P invertible telle que $P^{-1}AP = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Dans ca cas les λ_i sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont les vecteurs propres de A.*

Marche à suivre pour diagonaliser une matrice
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice.

1. On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = Det(A - XI_n)$.
2. On calcule les racines de $\chi_A(x)$ soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ces racines. Ce sont les différentes valeurs propres de A
3. On calcule les espaces propres $E_i := \{[v] \in \mathbb{K}^n \mid A[v] = \lambda_i[v]\}$
4. Si $\sum_{i=1}^{r} Dim(E_i) = n$, alors A est diagonalisable.
5. On calcule la matrice P en utilisant les vecteurs propres associés aux λ_i $(i = 1, \dots, r)$.

Exemples

Théorème 3.3.7. *a) Toute matrice carrée de taille n possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*
b) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

4 Équations différentielles linéaires

Définitions 4.0.1. Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables. Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

l'entier n est l'ordre de l'équation. On doit que cette équation est linéaire si y et ses dérivées apparaissent au premier degré...(pas de $(y')^2$,...pas de $sin(y)$,....)
Une équation linéaire d'ordre n sera donc de la forme

$$a_0(x)y + a_2(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

Cette équation est homogène si $g(x) = 0$ et à coefficients constants si pour tout i, $a_i(x) = a_{\in}\mathbb{R}$.

Exemples 4.0.2.
1. $y' = x$
2. $y' = sin(x)$
3. $y' = 3y$
4. $y'' = y$

4.1 Équation du premier ordre à variables séparées

Elles sont de la forme

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)} \qquad \text{ou} \quad y'f(y) = g(x)$$

Ce type d'équations se résout par calcul de primitives. Si $G(x)$ est une primitive de $g(x)$ alors $G'(x) = g(x)$. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $F'(x) = f(x)$. Par dérivation d'une composition, $F(y(x))' = y'(x)F'(y(x)) = y'f(y)$. Ainsi l'équation différentielle $y'f(y) = g(x)$ se réécrit $F(y(x))' = G'(x)$ ce qui équivaut à une égalité de fonctions : $F(y(x)) = G(x) + c$.

Exemple

Résoudre $x^2y' = e^{-y}$. On a $y'e^y = 1/x^2$ $(x \neq 0)$. On intègre dans les deux membres $e^y = -1/x + c$ et donc pour $-1/x + c >$, $y(x) = ln(-1/x + c)$ qui est une solution sur les intervalles ou cette fonction est définie et dérivable.

4.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition 4.2.1. *Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (E.H.)$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

On en déduit le principe de superposition que l'on énonce sous forme de proposition.

Proposition 4.2.2. *On trouve toutes les solutions d'une équation différentielle linéaire*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x) \qquad (E.G.)$$

en ajoutant une solution de l'équation (E.G) aux solutions de l'équation homogène (E.H.).

Définition 4.2.3. Une équation différentielle du premier ordre est une équation du type

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a, b sont de fonctions (continues) définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.2.4. *Soit $a \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $y(x) = ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.*

Représetation graphique des solutions : cas où $a < 0$ et où $a > 0$.

Théorème 4.2.5. *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Les solutions sur I de l'équation différentielle : $y_0 = a(x)y$ sont les fonctions y définies par $y(x) = ke^{A(x)}$, où k est une constante quelconque.*

Exemple
Résoudre l'équation différentielle $x^2y' = y$.

Théorème 4.2.6. *On considère l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ Si y_0 est une solution de cette équation, alors toutes les solutions sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par : $y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$.*

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.
Exemple
$y' + y = e^x + 1.$

5 Système d'équations différentielles linéaires

On va s'intérsser aux systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$Y'(x) = AY(x) + B(x) \qquad (S)$$

Où $Y = (y_1'(x), \ldots, y_n'(x))^t$, , $Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^t$, $B = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^t$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$

On résoudra d'abord le système homogène associé $Y'(x) = AY(x)$ noté (S_0) On trouvera ensuite une solution particulière Y_0 du système général (S) et les solutions du système (s) seront alors obtenues en ajoutant Y_0 aux solutions de (S).

Remarque 5.0.1. Une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants peut se ramener à un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1. En effet soit $y(x)$ une fonction de $\mathcal{C}_(I)$ (I un intervalle de $\mathbb{R}$) pour résoudre l'équation différentielle :

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) + b(x) \qquad (E)$$

On pose $y_(x) = y(x), y_2(x) = y_1'(x) = y'(x), y_3(x) = y_2'(x), \ldots, y_n(x) = y_{n-1}'(x)$ et résoudre l'équation (E) ci-dessus revient à résoudre le sytème

$$Y'(x) = AY(x)+B(x) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Remarquons que le polynôme caractéristique de la matrice A est $X^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

5.1 Systèmes homogènes

Théorème 5.1.1. *Les solutions du système homogène $Y' = AY$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ forment un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace des fonctions de classe $C_1(I)$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une base de ces solutions est appelée un système fondamental de solutions.*

Le théorème suivant montrera l'importance des valeurs propres de la matrice A lors de la résolution d'un tel système différentiel. La notation $\underline{v}$ désignera un vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$

Théorème 5.1.2. *Si $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ alors une solution du système homogène $Y'(x) = AY(x)$ est $Y = e^{\lambda x}\underline{v}$. En outre si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sont des valeurs propres distinctes de A et $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ des vecteurs propres associés alors les solutions associées $e^{\lambda_1 x}\underline{v}_1, \ldots, e^{\lambda_l x}\underline{v}_l$ sont linéairement indépendantes.*

Exemple

Résoudre le système $Y'(x) = AY(x)$ où A est la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On trouve les valeurs propres $-2, -1, 0.$ et les vecteurs propres associés $\underline{v}_1 = (-1, 1, 0)^t$, $\underline{v}_2 = (-1, 2, 0)^t$, $\underline{v}_3 = (0, 0, 1)^t$. On en déduit trois solutions indépendantes du système proposé et donc ainsi un système fondamental de solutions et donc toutes les solutions de ce système.

Remarque 5.1.3. Bien sûr les solutions $Y_1(x), \ldots, Y_l(x)$ sont obtenues à une constante près. C'est à dire que lorsque l'on cherche à donner toutes les solutions du système (S_0) (ou (S)) on doit mentionner ces constantes. Il est fréquent cependant que des "conditions initiales" fixent ces constantes. Mentionnons à ce propos le théorème suivant que l'on ne démontrera pas.

Théorème 5.1.4 (Théorème de Cauchy)**.** *Pour tout choix de conditions initiales le système (S) (resp. (S_0)) admet une solution unique définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*

Il est important de pouvoir décider si un ensemble de solutions $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ du système $Y'(x) = AY(x)$ (définies sur un intervalle I) est un système fondamental c'est à dire une base de l'espace des solutions. Comme dans le cas de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ il suffit de considérer le déterminant de ces fonctions. On obtient donc une fonction, le Wronskien, définie sur I, que l'on note $W(Y_1(x), Y_2(x). \ldots, Y_n(x))$ i.e. $W(Y_1(x), Y_2(x). \ldots, Y_n(x)) = Det(Y_1(x), Y_2(x). \ldots, Y_n(x))$.

On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 5.1.5. *Etant donné une famille $A = \{Y_1(x), \ldots, Y_n(x)\}$ de n solutions de l'équation différentielle (S) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les affirmation suivantes sont équivalentes :*

1. *A est un système fondamentale de solution sur I*
2. *Il existe $x_0 \in I$ tel que $W(Y_1(x_0), \ldots, Y_n(x_0)) \neq 0$.*
3. *$W(Y_1(x), Y_2(x). \ldots, Y_n(x))$ ne s'annule pas sur I.*

5.2 Cas où A est diagonalisable

a) Soit à résoudre le système $X' = AX$ sachant que $A \in$ est diagonalisable. On cherche les valeurs propres et les espaces propres de A et on trouve donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$ (les λ_i ne sont pas nécessairement distinctes) telles que $P^{-1}AP = D$. On en déduit $X' = PDP^{-1}X$. On pose $Y = P^{-1}X$ qui conduit à $Y' = DY$ et par conséquent on a les solutions $y_i(x) = k_i e \lambda_i x$ pour $i = 1,_d ots, n$. On reviet alors au système initial et a ses solutions : $X = PY$. Remarquez qu'il n'est pas nécessaire de calculer la matrice P^{-1}. La solution générale est donc

$$X(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x} v_n$$

où les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont des vecteurs propres de A qui forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemples 5.2.1. a) Résoudre le système linéaire : $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Résoudre le système linéaire : $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on trouve le polynôme caractérstique $\chi_A(x) = x(x-1)(x-2)$ les vecteurs propres sont $v_0 = (1,1,-1), v-1 = (0,-1,1)$ et $v_2 = (1,1,1)$ de sorte que les somution du système sont les fonctions $Y(x) = \alpha v_0 + \beta e^x v_1 + \gamma e^{2x} v_2$)

Remarque 5.2.2. Remarque si les valeurs propres sont des nombres complexes, on notera que le polynôme caractéristique étant à coefficients réels les valeurs propres complexes seront deux à deux conjuguées et on pourra trouver des solutions réelles en remarquant que les fonctions conjuguées sont aussi solutions... Exemple : Résoudre $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Les valeurs propres sont $2, 1+i, 1-i$. Un vecteur propre associé à 2 est $(1,1,1)$. Le polynôme caractéristique est $(2_x)((1-x)^2+1)$ On a donc trois valeurs propres $2, 1+i$ et $1-i$. Les vecteurs $(1,1,1)^t$, $(i,-1,1)^t$ et $(-i,-1,1)^t$ sont des vecteurs propres associés. Sur $\mathbb{C}$ les solutions sont données par

$$\alpha e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)x} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en tire les solutions réelles :

$$\alpha e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{x} \begin{pmatrix} -sin(x) + icos(x) \\ -cos(x) - isin(x) \\ cos(x) + isin(x) \end{pmatrix} + \gamma e^{x} \begin{pmatrix} -sin(x) - icos(x) \\ -cos(x) + isin(x) \\ cos(x) - isin(x) \end{pmatrix}$$

et donc sur $\mathbb{R}$ les solution sont

$$\alpha e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{x} \begin{pmatrix} -sin(x) \\ -cos(x) \\ cos(x) \end{pmatrix} + ce^{x} \begin{pmatrix} cos(x) \\ -sin(x) \\ sin(x) \end{pmatrix}$$

b) Soit à résoudre le système $X(x)' = AX(x) + B(x)$ (non homogène) sachant toujours que A est diagonalisable. Comme ci-dessus on trouve P et D telles que $P^{-1}AP = D$. On résout le système homogène $X' = AX$ comme ci-dessus. Puis on cherche une solution particulière de chacune des n équations du système en se basant sur les solutions des équations homogènes. On pourra éventuellement utiliser la méthode de variation des constantes pour trouver ces solutions particulières.

Exemple 5.2.3.

5.3 Cas où A est triangularisable

Supposons que la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ du système $Y' = AY + B$ soit trigonalisable (c'est toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mais non diagonalisable c'est à dire qu'il existe une matrice P telle que $P^{-1}AP = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure (i.e. les entrées en dessous de la diagonale principale sont toutes nulles).

On pose alors $Y = PZ$ et l'équation $Y' = AY + B$ devient successivement $PZ' = APZ + B$ et donc $Z' = P^{-1}APZ + P^{-1}B$ et finalememnt $Z' = TZ + P^{-1}B$ La matrice T étant triangulaire le système sera plus facile à résoudre

On va donc devoir

(a) Calculer P et T

(b) Résoudre le système $Z' = TZ + P^{-1}B$

(c) Revenir aux solutions du système initial.

5.3.1 Triangualarisation

Théorème 5.3.1. *Pour qu'une matrice $A \in \mathbb{K}$ soit trigonalisable il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de A se factorise liéairement dans $\mathbb{K}[X]$. C'est à dire qu'il existe $\lambda_1; \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ et $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i}$. Ceci est toujours possible si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Supposons donc que l'on ait obtenu la décomposition $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i}$, les λ_i sont bien sur les valeurs propres. On calcule les espaces propres E_i On a toujours $DimE_i \leq n_i$.

Si la dimension $Dim(E_i) = n_i$ on obtient n_i vecteurs propres liéairement indépendants associés à λ_i et sur cet espace la matrice se diagonalise. Le problème se pose donc de savoir que faire quand $DimE_i < n_i$. On ne va pas faire ici "la théorie" de ce cas... On la pratiquera sur deux ou trois exemples.

Triangulariser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

On a $\chi_A(X) = -(X-2)^3$. On a $E_3 = sev < \underline{v} = (1,0,1)^t >$. On cherche maintenant $\underline{u}$ tel que $(A - 2I_3)\underline{u} = \underline{v}$. On trouve $\underline{u} = (-1/2, 1/2, 0)$. On cherche finalement $\underline{w}$ tel que $(A - 2I_3)w = \underline{u}$. On trouve $\underline{w} = (1/2, 0, 0)$. On a alors

$$A(\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarquez bien la forme de la matrice triangulaire : En dessous de la diagonale principal il n'y a que des zéros, sur la diagonale pricipale on trouve les valeurs propres (autant de fois que l'exposant de cette valeur propre dans la décomposition du polynôme caractéristique) au dessus de la diagonale principale un diagonale de "1" et au dessus de cette diagonale là de nouveau des zéros. C'est en fait ce que l'on appelle la décomposition de Jordan.

5.3.2 Résolution d'un système différentiel triangulaire

Un système différentiel triangulaire se résout en partant de la dernière équation. Donnons un exemple : soit à résoudre le système différentiel

$$Y' = AY \quad \text{ou} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ce qui se traduit par $y_1' = 2y_1$, $y_2' = 3y_2 + y_1$ et $y_3' = 3y_3$. $(1,0,0)^t$ est un vecteur propre pour la valeur propre 2 ce qui fournit une première solution : $(e^{2x},0,0)^t$. Ensuite l'espace propre asocié à la valeur propre 3 est de dimension 1 engendré par $\underline{x} = (0,1,0)^t$ ce qui fournit une deuxième solution $(0,e^{3x},0)$ on cherche alors un vecteur $\underline{u}$ tel que $(A-3I_3)\underline{u} = \underline{x}$. On voit que $\underline{u} = (0,0,1)^t$ convient et ceci fournit ainsi la solution $(0,xe^{3x},e^{3x})$. Les solutions du système $Y' = AY$ sont donc de la forme

$$\lambda \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

5.3.3 Retour au système initial

Un exemple : Soit le système $Y' = AY$ où A est la matrice en (I) que l'on a trigonalisée 2 paragraphes plus haut. Les vecteurs trouvés lors de cette trigonalisation fournissent un système fondamental de solutions. Le vecteur $\underline{v}$ donne

$$\underline{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

Le vecteur $\underline{u}$ fournit

$$\underline{Y}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{2x}}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} xe^{2x}$$

et enfin le vecteur $\underline{w}$ conduit à

$$\underline{Y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{2x}}{2} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{xe^{2x}}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2e^{2x}}{2}$$

De sorte que les solutions du système proposé sont les combinaisons linéaires de ces trois solutions.

5.3.4 Système non homogène

C'est le cas des systèmes $Y' = AY + B(x)$ où la matrice A est triangularisable mais pas diagonalisable. On cherche d'abord les solutions du système homogène $Y' = AY$ puis on cherche une solution particulière du système général $Y' = AY + B(x)$ que l'on ajoute aux solutions du système homogène. Il faut noter que l'on aura parfois besoin de calculer P^{-1} lorsque l'on revient au système initial.

5.4 Equations non linéaires

5.4.1 Equation homogène du premier ordre

Ce sont des équations de la forme

$$y' = f(x, y) \quad \text{ou} \quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On pose $\lambda = x^{-1}$ et on obtent une équation à variable séparée.

5.4.2 Equation de Bernoulli

Ce sont des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m \ , \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

Une telle équation se ramène à une équation linéaire.

5.4.3 Equation de Ricatti

Elles sont de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)y^2 + d(x)$$

On suppose cnnue une solution particulière $y_p(x)$ et on pose $z(x) = y(x) - y_p(x)$ ce qui ramène un etlle équation à une équation de Bernoulli